DISTANCIAS II

Ejercicio nº 1.-

Halla la distancia de $P(5, 3, -4)$ al plano π: $x + 3y - z + 5 = 0$.

Ejercicio nº 2.-

Calcula la distancia de $P(1, 0, 2)$ a la recta r: $(2\lambda, -\lambda, 1 + \lambda)$.

Ejercicio nº 3.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$$

Halla:

a) La distancia entre las rectas.

b) La recta perpendicular a r y s.

Ejercicio nº 4.-

Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \quad \text{y otro sobre} \quad s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}$$

Calcula el área del cuadrado.

Ejercicio nº 5.-

Dados los puntos $P(1, 0, 2)$ y $Q(2, -1, 0)$ y el plano π: $x + y + 2z - 1 = 0$, calcula:

a) La distancia entre P y Q.

b) La distancia de P a π.

Ejercicio nº 6.-

Calcula la distancia entre las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = -2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

SOLUCIONES

Solución nº 1:

$$dist(P,\pi)=\frac{|5+3\cdot 3+4+5|}{\sqrt{1^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{23}{\sqrt{11}}=6{,}93$$

Solución nº 2:

1ª *forma:*

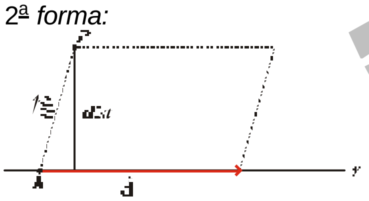
- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:
  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n}=(2,-1,1)$. Pasa por $P(1,0,2)$.
  Su ecuación es:
  π: $2(x-1)-y+(z-2)=0 \quad\rightarrow\quad \pi$: $2x-y+z-4=0$
- Intersección de π y r:
  Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2\cdot(2\lambda)+\lambda+(1+\lambda)-4=0 \;\rightarrow\; 6\lambda-3=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{-1}{2} \\ z=\dfrac{3}{2}\end{cases} \;\rightarrow\; P'\left(1,\frac{-1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P,r)=dist(P,P')=\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}71$$

2ª *forma:*



Recta $r:\begin{cases} R(0,0,1) \\ \vec{d}(2,-1,1)\end{cases}$

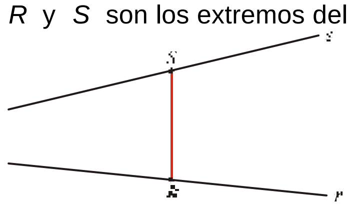
Punto $P(1,0,2)$

$$dist\,(P,r)=\frac{\text{Área}}{\text{Base}}=\frac{\left|\overrightarrow{RP}\times\vec{d}\right|}{\left|\vec{d}\right|} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{RP}\times\vec{d}=(1,1,-1) \\ \left|\overrightarrow{RP}\times\vec{d}\right|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3} \\ \left|\vec{d}\right|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}\end{cases}$$

$$dist\,(P,r)=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=0{,}71$$

Solución nº 3:

a) R y S son los extremos del segmento perpendicular a ambas rectas.



Un punto genérico de r es $R(1+\lambda,\ 2\lambda,\ -2)$ y un punto genérico de s es $S(2+3\mu,\ 2\mu,\ 1+\mu)$.

Un vector genérico que tenga su origen en r y su extremo en S es:

$\overrightarrow{RS}=(1+3\mu-\lambda,\ 2\mu-2\lambda,\ 3+\mu)$

De todos los posibles vectores $\overrightarrow{RS}$, buscamos aquel que sea perpendicular a las dos rectas:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{RS}\cdot(1,2,0)=0 \;\rightarrow\; 1+3\mu-\lambda+4\mu-4\lambda=0\\ \overrightarrow{RS}\cdot(3,2,1)=0 \;\rightarrow\; 3+9\mu-3\lambda+4\mu-4\lambda+3+\mu=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}1-5\lambda+7\mu=0\\ 6-7\lambda+14\mu=0\end{array}\right\}$$

La soluciónes: $\lambda=\dfrac{-4}{3}$, $\mu=\dfrac{-23}{21}$

Sustituyendo en r y s obtenemos los puntos R y S.

$$\left.\begin{array}{l}R\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{-8}{3},-2\right)\\ S\left(\dfrac{-9}{7},\dfrac{-46}{21},\dfrac{-2}{21}\right)\end{array}\right\}\ dist(r,s)=dist(R,S)=\sqrt{\left(\dfrac{-20}{21}\right)^2+\left(\dfrac{10}{21}\right)^2+\left(\dfrac{40}{21}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2100}}{21}=2{,}18$$

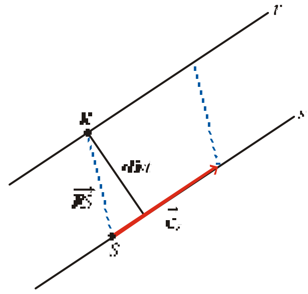
b) La recta perpendicular a r y s, es la recta que pasa por R y S.

$$\overrightarrow{RS}=\left(\dfrac{-20}{21},\dfrac{10}{21},\dfrac{40}{21}\right)$$

$$\text{La recta buscada es: }\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}-\dfrac{20}{21}\lambda\\ y=\dfrac{-8}{3}+\dfrac{10}{21}\lambda\\ z=-2+\dfrac{40}{21}\lambda\end{cases}$$

Solución nº 4: $\vec{d}_r=(1,-2,-1)\ //\ \vec{d}_s=(2,-4,-2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre r y s.



$$dist(r,s)=dist(R,s)=\dfrac{\text{Área}}{\text{Base}}=\dfrac{\left|\overrightarrow{RS}\times\vec{d}_s\right|}{\left|\vec{d}_s\right|}=\dfrac{\left|(-10,-4,-2)\right|}{\sqrt{4+16+4}}=\dfrac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}}=\sqrt{5}=\text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, $\text{Área}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5\ u^2$

Solución nº 5: a) $dist(P,Q)=\sqrt{(2-1)^2+(-1)^2+(-2)^2}=\sqrt{6}=2{,}45$

b) $dist(P,\pi)=\dfrac{\left|1+0+2\cdot 2-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{6}}=1{,}63$

Solución nº 6: El vector dirección de r es $\vec{d}=(1,-1,1)$ y el de s es $\vec{d}'=(-1,1,1)$.

Hallemos el plano π que contiene a r y es paralelo a s.

$$\left.\begin{array}{l}(1,-1,1)\ //\ r\\ (-1,1,1)\ //\ s\end{array}\right\}\ \text{Por tanto, } (1,-1,1)\times(-1,1,1)=(-2,-2,0) \text{ es perpendicular a } \pi.$$

El punto $(-2,4,0)$ es de r y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$-2(x+2)-2(y-4)=0 \quad\rightarrow\quad 2x+2y-4=0$

$$dist(s,r)=dist(s,\pi)=dist[(0,1,0),\pi]=\dfrac{|2-4|}{\sqrt{4+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{8}}=0{,}71$$